جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

# دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
# مرحله اول
# یازدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۷۹

| مدت آزمون (دقیقه) | تعداد سوالات | |
|---|---|---|
| | مساله‌های تشریحی | سوالات چند گزینه‌ای |
| ۱۸۰ | - | ۴۰ |

**توضیحات مهم**

**استفاده از ماشین حساب ممنوع است.**

**تذکرات آزمون:**

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۴۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- به چند طریق می‌توان از میان اعداد ۱ تا ۳۰، سه عدد متمایز انتخاب کرد، به طوری که تشکیل تصاعد هندسی دهند؟

الف) ۶ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۲- رقم‌های یک نظام عددی عبارت‌اند از ۱ با ارزش یک، ۰ با ارزش صفر و $\bar{1}$ با ارزش منفی یک (۱-). چند عدد چهار رقمی با مقادیر متمایز در این نظام عددی وجود دارد؟ مثلاً مقدار اعداد $\bar{1}1\,00$ و $\bar{1}111$ هر دو برابر ۱- است.

(برای $\bar{1}1\,00$، $-1 = 1 + 2 \times (-1) + 4 \times 0 + 8 \times 0$).

الف) ۱۶ ب) ۱۷ ج) ۳۱ د) ۳۲ ه) ۸۱

۳- با خواندن کلمات ۹ حرفی از حروف a و b از چپ به راست، با دیدن هر a دو گلوله در کاسه‌ای می‌اندازیم و با دیدن هر b، یک گلوله از کاسه برمی‌داریم. در شروع کار کاسه خالی است. به ازای چند کلمه از کلمات ۹ حرفی پس از خواندن حرف نهم، کاسه خالی خواهد بود؟(اگر در هنگام خواندن کلمه‌ای به حرف b برسیم و گلوله‌ای در کاسه نباشد تا آن را برداریم، آن کلمه در این شمارش محسوب نخواهد شد).

الف) ۳ ب) ۹ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۵

۴- تعداد جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۱۰ که در آن به ازای هر i بین ۱ تا ۵، عدد ۱- 2i قبل (و نه لزوماً بلافاصله قبل) از عدد 2i آمده باشد کدام است؟

الف) $\frac{۱۰!}{۵!۵!}$ ب) $\frac{۱۰!}{۲!}$ ج) $\frac{۱۰!}{۵!}$ د) $\frac{۱۰!}{۲^۵}$ ه) ۵!

۵- اگر S و T دو رشته از ۰ و ۱ باشند، ST رشته‌ای است که از نوشتن پشت سر هم این دو رشته به دست می‌آید. مثلاً اگر S =۱۰۱۰ و T =۰۱۱ باشد، ST =۱۰۱۰۰۱۱ و TS =۰۱۱۱۰۱۰. طول یک رشته تعداد ۰ و ۱ های آن است. مثلاً طول رشته TS در بالا ۷ است. اگر B رشته ای از ۰ و ۱ و A = ۱۰۱۱ باشد به طوری که AB=BA ، طول رشته B کدام می‌تواند باشد؟

الف) ۱۳۷۸ ب) ۱۳۷۹ ج) ۲۰۰۱ د) ۲۰۰۲ ه) هیچکدام

۶- قد ۸ دانش آموز J,K,L,M,N,O,P,Q اندازه‌گیری شده است. می دانیم:

* هیچ دو نفری هم قد نیستند.
* قد L از M بلندتر و قد M از N بلندتر است.
* قد J از قد K بلندتر نیست.
* قد N از Q بلندتر و قد Q از J بلندتر است.
* قد O از قد P بلند تر نیست.
* L تنها از بلندقدترین فرد کلاس کوتاه‌تر است .

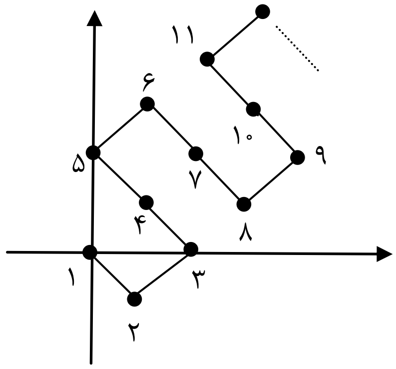
چند ترتیب مختلف از نظر قد برای این دانش آموزان وجود دارد؟

الف) ۳۴ ب) ۳۵ ج) ۳۶ د) ۳۸ ه) ۳۹

۷- تعداد زوج عددهای دودویی حداکثر ۷ رقمی که مجموع آن‌ها برابر ۱۰۱۰۱۰۱۰ است چقدر است؟ دقت کنید که در این شمارش، مثلاً زوج عددهای ۱۰۱۰۰۰۰۰ و ۰۰۰۰۱۰۱۰ یک بار محسوب می‌شود.

الف) ۴۲ ب) ۴۳ ج) ۴۴ د) ۸۵ ه) ۸۷

۸- اعداد ۱،۲،۳، و ... را مطابق شکل بر روی صفحه‌ی مختصات می‌نویسیم. این اعداد به ترتیب در مختصات (۲و ۰)، (۱، -۱)، (۲، ۰) و ... قرار دارند. مختصات نقطه‌ی متناظر عدد ۱۳۷۹ چیست؟




الف) (۴۶۰، ۴۵۸)
ب) (۲۳۱، ۲۲۹)
ج) (۴۵۹،۴۶۱)
د) (۹۱۶،۹۱۸)
ه) (۹۱۷،۹۱۹)

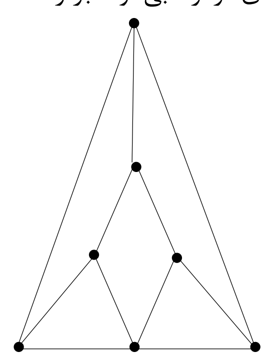
۹- ۹ لامپ در سه ردیف سه‌تایی قرار دارند. آن‌ها را با رنگ‌های قرمز، سبز، آبی، و زرد رنگ می‌کنیم. می دانیم:

- در یک ردیف یا ستون، هیچ دو لامپی هم‌رنگ نیستند.
- لامپ وسط قرمز است.
- دقیقاً یک لامپ سبز است.

حداقل تعداد لامپ‌های آبی چند است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د)۴ ه) ۵

۱۰- به چند طریق می‌توان پاره خط‌های شکل مقابل را رنگ آمیزی کرد به‌گونه‌ای که هر دو پاره خط که در یک نقطه انتهایی اشتراک دارند ناهمرنگ باشند؟ پاره خط‌ها را می‌توان با رنگ‌های قرمز، آبی، و سبز رنگ آمیزی کرد و برای رنگ آمیزی پاره خط‌های متصل به رأس a می‌توان از رنگ زرد نیز استفاده کرد.



الف) صفر ب) ۱ ج) ۴ د) ۱۲ ه) ۲۴

۱۱- در زمان صفر، یک دو چرخه و دو نفر در نقطه a هستند. این دو نفر می‌خواهند به نقطه B در فاصله ۱۳۰۰ متری بروند. سرعت پیاده روی و سرعت دوچرخه سواری نفر اول به ترتیب ۴ متر در ثانیه و ۱۲ متر در ثانیه است. این سرعت‌ها برای نفر دوم به ترتیب ۶ و ۱۶ متر در ثانیه است. با فرض آن که در هر زمان فقط یک نفر می‌تواند سوار دوچرخه شود، جزء صحیح کم‌ترین زمان لازم برای اینکه هر دو نفر به نقطه B برسند چه‌قدر است؟

الف) ۱۵۰ ثانیه ب) ۱۶۳ ثانیه ج) ۱۷۵ ثانیه د) ۱۸۰ ثانیه ه) ۲۱۵ ثانیه

۱۲- ۶ نفر برای انتخاب در یک کمیته ۳ نفره نامزد شده‌اند. تعداد انتخـــاب کنندگان ۳۰ نفر است و هر یـک دقیـقاً به ۳ نفر رأی داده اسـت. نفرات منتخب به ترتیب ۲۶، ۲۲، و ۱۹ رأی آورده‌اند. حداقل چند نفر به هر سه عضو انتخاب شده رأی داده‌اند؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) هیچکدام

۱۳- ۵ عدد چهار رقمی دودویی ۱۰۱۰، ۰۰۰۱۱، ۰۰۱۱، ۰۰۰۰۱، ۰۱۱۰ داده شده است. می‌توان یک عدد $K$ رقمی $A$ پیدا کرد که شامل همه این ۵ عدد باشد (مثلاً عدد ۱۱۰۰۱۱۰۱۰۱۰ فقط شامل ۰۰۱۱، ۰۱۱۰، و ۱۰۱۰ است). کمینه‌ی تعداد ارقام $A$ (یعنی $K$) چند است؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ ه) ۱۲

۱۴- از هر کدام از هفت نفر به نام‌های $A$، $B$، $C$، $D$، $E$، $F$ و $G$ سؤال شد که چند نفر از بقیه را از قبل می‌شناسد . این افراد به ترتیب از $A$ پاسخ دادند: ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۲، ۱ ( یعنی به عنوان مثال $C$، ۴ نفر دیگر را می‌شناسد). می دانیم:

- حداکثر یک نفر دروغ گفته است.
- دروغ‌گو تعداد افرادی که از قبل می‌شناسد را کم‌تر از مقدار واقعی می‌گوید.
- شناختن یک رابطه دو طرفه است.
- $F$ حتماً راست گفته است.

چه کسی حتماً دروغ گفته است؟

الف) $D$ یا $E$ ب) $E$ یا $G$ ج) $C$ یا $G$ د) $E$ یا $C$ ه) $D$ یا $G$

۱۵- حسین و علی با یک سکه که یک روی آن سفید و روی دیگر سیاه است بازی می‌کنند، به طوری که هر بـار سکه را به هـوا می‌اندازند تا بـر زمین افتد و رنگ ظاهر شده را یادداشت می‌کنند (می دانیم احتمال رو آمدن سیاه و سغید برابر اسـت). اگر ۱۰ سفیـد متوالـی بیایـد، حسین و اگر یک سیاه و بلافاصله بعد از آن ۹ سفید متوالی بیاید، علی برنده می‌شود. بازی تا آن‌جا که یکی از دو نفر برنده شود ادامه می‌یابد. احتمال برد علی چقدر است؟

الف) کمتر از $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۹}{۱۰}$ ه) بیشتر از $\frac{۹}{۱۰}$

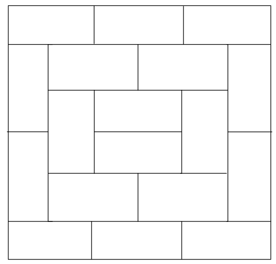
۱۶- یک دنباله از رقم‌های ۰ و ۱ را یک رشته می‌نامیم. رشته $A$ را زیر رشته $B$ گوییم اگر $A$ را از حذف تعدادی (صفر یا بیشتر) از رقم‌هـای ابتدایی و انتهایی $B$ به دست آید. مثلاً هر کدام از رشته‌های ۱۱۰۱، ۰۱۱، ۱۰۱، و ۱۱۰، زیر رشته ۰۱۱۰۱ هستند.اگر $S$ یک رشتـه بـه طول حد اکثر ۶ باشد، منظور از $A_S$ مجموعه‌ی رشته‌های به طول ۶ است که $S$ زیر رشته‌ی آن‌ها نباشد. به ازای کدام‌یک از گزینه‌های زیر به عنوان $S$ و $T$، $A_S \cup A_T$، $۲^۶$ عضو دارد؟

الف) ۰۱۰۱ و ۱۱۱ ب) ۱۰۱ و ۱۱۱ ج) ۱۱۰۱۱ و ۱۰۱۱۰ د) ۰۱۰۱ و ۱۱۱۰ ه) الف، ب، ج

۱۷- یک جدول ۹×۹ از اعداد ۰ و ۱ داده شده است. می‌دانیم در هـر چهـار خانه‌ای کـه تشکیل یک مربع ۲×۲ بدهـند حداقل ۲ و حداکثر ۳ بار عدد ۱ ظاهر شده است. حداقل و حداکثر تعداد یک‌های جدول چقدر می‌تواند باشد؟

الف) ۴۱ و ۶۵ ب) ۴۰ و ۶۱ ج) ۳۶ و ۶۵ د) ۴۰ و ۶۵ ه) ۳۶ و ۶۱

۱۸- می‌خواهیم Kعدد کاشی ۲×۱روی کـــف یک اتاق ۶×۶ بگذاریم و از کودکی بخواهیم تا بقیه‌ی کف اتاق را با کاشی‌ها ۲×۱ کاملاً پر کند. برای اینکه کودک راهـی جز چیدن کاشـی‌ها بـه صورت شکل رو بـه رو نداشته باشد، حداقل K چند است؟



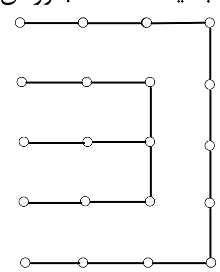
الف)۲ ب)۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۱۹- مجموعه کلمات ۱ تا ۶ حرفی از حروف a و b را مانند کلمات لغت نامه مرتب می‌کنیـــم، ۷۹ امیـن کلمـه در این مجمـوعه مرتب کدام است؟

برای روشن شدن مفهوم مرتب کردن کلمـات، مجموعـه‌ی مرتـب کلمات ۱ تا ۳ حرفـی بـه ترتیب از چپ به راسـت بـرابـر است با: a،aa،aaa،aab،ab،aba،abb،b،ba،baa،bab،bb،bba،bbb که نهمین کلمه در آن ba است.

الف) baabba ب) abaaa ج) baaabb د) baab ه) bab

۲۰- امید و حمید با هم نقطه بازی می‌کنند. قاعده بازی به این صورت است که هر نفر در نوبت خود باید یـــک نقطه را به یک نقطه مجاور آن که قبلاً به آن وصل نشده، متصل کند و هرگاه یک نفر یک مربع ۱×۱ را کامـل کـرد، باید یک حرکـت دیگـر به عنوان جایزه انجام دهد (دو نقطه در صورتی مجاورند که فاصله‌ی آن‌ها یک باشد). امتیاز یک فرد در انتهای بازی برابر تعداد مربع‌های ۱×۱ است که او کامل کرده است. نوبت حمید است که بازی کند و وضعیت بازی به شکل روبه‌رو است .در نهایت اگر هرنفر بهترین بازی خود را انجام دهد .بازی با چه نتیجه ای تمام می‌شـــود؟



الف) ۱۰ بر ۲ به نفع امید ب) ۸ بر ۴ به نفع امید ج) ۴ بر ۸ به نفع حمید
د) ۳ بر ۹ به نفع حمید ه) ۲ بر ۱۰ به نفع حمید

۲۱- یک جدول ۱۲×۱۲ داریم که در گوشه بالای سمت راست و پایین سمت چپ آن حرف O قرار دارد و گوشه‌ی بالای سمت چپ و همچنین پایین سمت راست آن با حرف X پرشده است .در قدم اول در خانه‌های مجاور خانه‌های شامـــل O،حرف O قرار می‌دهیـم و در قدم بعد در خانه‌های مجاور خانه‌های شامل X، حرف X را می‌نویسیم (اگر این خانه قبلاً با حرف دیگری پر شده بود،حرف قبلی را پاک و حرف جدید را جایگزین می‌کنیم ). این کار را متناوباً تکرار می‌کنیم. اگر در هر قدم تعداد Oها در جدول را با K نشان دهیم ،حداکثر K چقدر است؟(دو خانه را که یک ضلع مشترک دارند مجاور می‌نامیم.)

الف) ۶۵ ب) ۷۲ ج)۹۴ د) ۱۱۲ ه)۱۲۴

۲۲- یک مکعب مشبک ۲×۲×۲ از ۸ ((ریـز مکعب)) بـه ابعـاد واحـد تشکیل شده است. داخـل هـر ریزمکعـب یـک رقـم صفـر یا یک می‌نویسیم. وجه‌هــای ایـن ریـزمکعـب‌هـا کـه بـر روی سـطـح مکـعب قـرار دارنـد ((وجـه خـارجـی)) مـی‌نـامیـم. یـک وجه خـارجـی

ریزمکعبی به نام $A$ را در نظر می‌گیریم .به این وجه یک عدد ۲ رقمی دودویی نسبت می‌دهیم .رقم با ارزش‌تر این عدد رقم نوشته شده‌ی داخل ریزمکعب $A$ و رقم دیگر آن رقم داخل ریز مکعب پشت $A$ (نسبت به وجه خارجی مورد نظر) است. این کار را برای همه وجه‌های خارجی انجام می‌دهیم .بنابراین روی هر سطح مکعب ۴ عدد دودویی با مقدار بین ۰ تا ۳۰ دیده می‌شود .به چند طریق می‌توان عددهای داخل ریزمکعب را تعیین کرد به گونه ای که روی هرکدام از سطح‌های مکعب، ۴ عدد متمایز قرار بگیرد؟

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۸ ه)۱۶

۲۳- افراد $A_1$،$A_2$ ،...، $A_{11}$ به ترتیب ساعت گرد دور یک میزگرد نشسته‌اند. از هرکدام از این افراد می‌پرسیم که آیا نفری که سمت چپ آن فرد نشسته است، راست‌گوست یا دروغ‌گو ؟به ترتیب این جواب‌ها به دست آمد :

د،ر،د،د،د،د،ر،ر،ر،ر ( د = دروغ‌گو ، ر= راست‌گو)

با توجه به این که دروغ گوها همیشه دروغ می‌گویند و راست‌گوها همیشه راست ،حداقل چند نفر دروغ‌گو در این جمع وجود دارد؟

الف)۳ ب)۴ ج) ۵ د) ۶ ه) چنین وضعیتی نمی‌تواند پیش بیاید

۲۴- سه ظرف ۳ لیتری داریم که در هرکدام ۱ لیتر آب وجود دارد. در هر حرکت یکی از ظرف‌ها را انتخاب می‌کنیم. مقدار $\frac{1}{3}$ آب درون آن را در یکی از دو ظرف دیگر و $\frac{1}{3}$ را درهمان ظرف اول باقی می‌گذاریم. فرض کنید این کار را چند با تکرار کنیم. در ظرف‌ها به ترتیب چه مقدار آب می‌تواند باشد.

الف) $\frac{۲۷}{۲۴۳}$، $\frac{۳۰۱}{۲۴۳}$، $\frac{۴۰۱}{۲۴۳}$ ب) $\frac{۱۳}{۸۱}$، $\frac{۸۹}{۸۱}$، $\frac{۱۴۱}{۸۱}$ ج) $\frac{۴۱}{۸۱}$، $\frac{۱۱۱}{۸۱}$، $\frac{۹۱}{۸۱}$ د) $\frac{۲۴۷}{۲۴۳}$، $\frac{۹۱}{۲۴۳}$، $\frac{۳۹۱}{۲۴۳}$ ه) $\frac{۲۹۲}{۲۴۳}$، $\frac{۱۲۹}{۲۴۳}$، $\frac{۳۰۸}{۲۴۳}$

۲۵- دو نفر روی مبدأ محور x ایستاده‌اند. در هر مرحله هرکدام به طور مستقل یک واحد به چپ یا راست می‌روند. به چند طریق ممکن است بعد از ۵ مرحله دو نفر در یک مکان باشند؟

الف) ۷۰ ب) ۱۲۷ ج) ۱۹۷ د)۲۵۲ ه)۲۵۶

۲۶- قرار است ۱۰۰ نفر معلم از بین ۴دانش آموز به نام‌های $A$، $B$،$C$ و $D$ یکی را به روش ((حذفی)) انتخاب کنند. این کار با معرفی دونفر از ۴ دانش آموز شروع می‌شود. معلمان رأی می‌دهند و فردی که رأی کمتری آورد حذف می‌شود. سپس بین فرد برنده و یکی از دو نفر دیگر رأی گیری می‌شود و در بار آخرین بین برنده‌ی بار دوم و تنها نفر باقی مانده رأی گیری می‌شود تا برنده‌ی نهایی معین شود. مدیر مدرسه در هر مرحله دو دانش آموزی که به رأی گذاشته می‌شوند را انتخاب می‌کند. او قبلاً در یک نظر خواهی از معلمان می‌داند که آن‌ها به صورت زیر رأی خواهند داد:

$C > A > D > B$: ۱۷ نفر

$A > B > D > C$: ۳۲ نفر

$D > B > C > A$: ۳۴ نفر

$B > A > C > D$: ۱۷ نفر

(به عنوان مثال ۳۴ نفر D را به B، B را به C و C را به A ترجیح می‌دهند.)

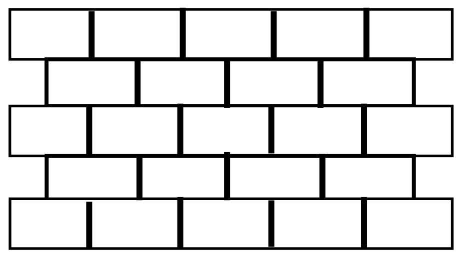
مثلاً اگر $A$و$B$ به رأی گذاشته شوند ، $B$ با اختلاف دو رأی برنده می‌شود .با این فرض که هیچ معلمی رأی خود را عوض نمی‌کند .مدیر مدرسه ممکن است بتواند به ترتیبی دانش آموزان را در هرمرحله به رأی بگذارد که دانش آموز مورد نظرش انتخاب شود.مدیر می‌تواند کاری کند که آخرین مرحله رأی گیری بین دانش آموزان زیر باشد:

الف) $A$و$B$ ب) $C$ و$D$ ج) $B$و$C$ د)$A$ و$C$ ه) همه‌ی حالت‌های ممکن

۲۷- یک خط ((سوایی)) در مثلث یک پاره خط از یک رأس مثلث به ضلع مقابل آن است. در مثلث ABC از رأس های A،B و C به ترتیب ۵،۱۵و ۱۰ خط سوایی رسم کرده‌ایم .اگر هیچ ۳ خطی در یک نقطه داخل مثلث هم‌دیگر را قطع نکنند،چند ناحیه در داخل مثلث به وجود می‌آید؟

الف) ۲۷۵ ب)۲۷۶ ج)۳۰۶ د) ۷۵۰ ه)۱۰۵۶

۲۸- در شکل روبه رو می‌خواهیم باپیمودن کوتاه‌ترین مسیر روی خطوط شبکه. از نقطه A به نقطه B برویم .این کار به چند طریق امکان پذیر است؟



الف) ۱۰ ب) ۲۸ ج)۳۲ د)۴۴ ه)۵۶

۲۹- یک بازی کامپیوتری بین بازی‌کن و کامپیوتر روی یک شبکه N × M انجام می‌گیرد. کامپیوتر به جای یک دزد که در آغاز در خانه‌ی (۱،۱) قرار دارد بازی می‌کند و بازی‌کن به جای پلیس که در آغاز در خانه‌ی (N , M) قرار دارد بازی می‌کند. بازی بدین صورت انجام می‌گردد که در هر مرحله ، نخست پلیس به یکی از خانه‌های مجاور خود (که با خانه‌ی فعلی یک ضلع مشترک دارد) می‌رود و سپس دزد با توجه به حرکت پلیس به یکی از خانه‌های مجاور خود می‌رود. اگر (وتنها اگر) پس از حرکت دزد، دزد و پلیس در یک سطر یا یک ستون قرار گرفتند پلیس می‌تواند دزد را مورد هدف قرار دهد و بازی پایان می‌پذیرد. در چند مورد از حالت‌های زیر از اندازه‌ی شبکه ،کامپیوتر می‌تواند ببرد؟

۸×۹ ۱۰×۱۰ ۵×۴ ۳×۵

الف) ۰ ب)۱ ج) ۲ د)۳ ه)۴

۳۰- چند کلمه ۸ حرفی از حروف a،b،c،d،e و f وجود دارد که در هر یک از آن‌ها دقیقاً دو نوع حرف متفاوت به کار رفته باشد؟

الف) ۱۰۲۴ ب) ۱۸۹۰ ج) ۳۸۴۰ د) ۳۸۱۰ ه)۱۵۳۶

۳۱- برروی یک خط مستقیم دو قورباغه در دو نقطه به فاصله‌ی ۶۹۵۰ سانتی متر از هم نشسته‌اند.در هر ((مرحله)) هر قورباغه در یکی از دو جهت راست یا چپ و بر روی خط می‌جهد. می‌دانیم که طول جهش دو قورباغه در هر مرحله یکسان و برابر توانی از دو است(مثل ۱،۲،۴،...) و جهش آن‌ها ممکن است در یک جهت نباشد .حداقل پس از چند مرحله ،دو قورباغه در یک نقطه‌ی مشترک فرود می‌آیند؟

الف) ۵ ب) ۶ ج)۷ د)۸ ه) ۱۰

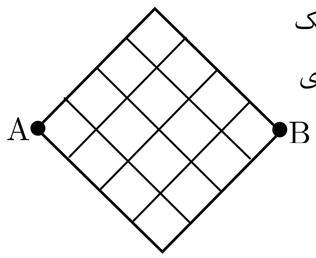
۳۲- فرض کنید A مجموعه‌ی کلیه‌ی رشته‌های به طول ۸ از ۰ و ۱ باشد که در آن‌ها رشته‌ی ۰۰ نیامده باشد(در رشته‌ی ۱۰۰۱۱۰۱۰ رشته ۰۰ آمده ولی در ۱۱۰۱۰۱۱۰ رشته ۰۰ نیامده است)و B مجموعه‌ی کلیه‌ی رشته‌های به طول ۸ باشد که در آن ۱۱ نیامده باشد. $A \cup B$ چند عضو دارد؟

الف)۶۶ ب) ۶۸ ج)۱۰۸ د)۲۵۴ ه)۲۵۶

۳۳- یک عدد دودویی n با۱۳۷۹ رقم صفر و یک را در نظر بگیرید (ممکن است تعدادی از رقم‌های سمت چپ آن صفر باشد). با هر (عمل) یکی از ارقام این عدد را انتخاب می‌کنیم و آن را تغییر می‌دهیم (صفر به یک و یک به صفر تبدیل می‌شود). حداقل تعداد عمل‌هایی که پس از آن عدد حاصل بر۳ بخش پذیر می‌شود را در نظر بگیرید. این تعداد را عدد بخش پذیری n می‌نامیم. در میان اعداد دودویی ۱۳۷۹رقمی ،بیشینه‌ی (ماکزیمم) عدد بخش‌پذیری چند است؟

الف)۱ ب) ۲ ج)۳ د)۶۸۸ ه)۱۳۷۹

۳۴- دو شخص با نام‌های A و B در نقاط مشخص شده در شکل قرار دارند. شکل از مربع‌های واحد تشکیل شده است. در هرثانیه A یک واحد به سمت راست و B یک واحد به سمت چپ روی خطوط حرکت می‌کنند. هرگاه دو راه در مقابل یک نفر وجود داشته باشد. با احتمال مساوی یکی از آن دو را انتخاب می‌کند. احتمال این که A وB در ۸ ثانیه‌ی اول در یک نقطه به هم برسند چه قدر است؟



الف) $\frac{۲۵}{۲۵۶}$ ب) $\frac{۳۰}{۲۵۶}$ ج) $\frac{۳۵}{۲۵۶}$ د) $\frac{۲۰}{۱۲۸}$ ه) $\frac{۳۵}{۱۲۸}$

۳۵- یک روبات (آدم مصنوعی)روی صفحه ای نامتناهی قرار دارد. حرکت این روبات به‌گونه‌ایست که ابتدا یک ((گـام)) به سمت بالا می‌رود، سپس یک گام به سمت راست،یک گام به پایین و یک گام به سمت چپ می‌رود (و همین کار را تکرار می‌کند:یک گام به بالا،....) این روبات طوری برنامه ریزی شده است که طول گام‌های آن به ترتیب برابر ۲،۱،...،۹،۱،۲،.... دسی متر باشد. روبات از نقطه ای شروع به حرکت می‌کند. پس از طی چند دسی‌متر دوباره به نقطه‌ی اولیه باز می‌گردد؟

الف)۴۵ ب) ۹۰ ج)۱۳۵ د) ۱۸۰ ه) دیگر هیچ‌گاه به نقطه‌ی اولیه باز نمی‌گردد.

۳۶- اگر نمایش دودویی عدد W را از راست به چپ بنویسیم و صفرهای سمت چپ آن را حذف کنیم ،عدد به دست آمده را $W^R$ می‌نامیم (به عنوان مثال اگر W =۱۱۰۰۱۰ =۵۰ آن‌گاه $W^R$=۱۰۰۱۱=۱۹) اگر بدانیم W دوازده برابر$W^R$ است، W حداقل چند رقم دارد؟

الف) ۸ ب)۹ ج) ۱۰ د)۱۱ ه)هیچ‌کدام

۳۷- در روستایی دادوستد فقط به صورت مبادله‌ی اجناس صورت می‌گیرد. فرض کنید فقط ۴ جنس به نام‌های A تا D مبادله می‌شوند. یک مبادله را به صورت یک فرمول نشان می‌دهیم. مثلاً $A\ B \leftrightarrow ۳C\ ۴D$ یعنی یک عدد جنس A و یک عدد جنس B را می‌توان با ۳ عدد جنس C و ۴ عدد جنس D مبادله کرد و برعکس.

می‌دانیم که فقط مبادله‌های زیر مجاز هستند:

$$B \leftrightarrow B\ D$$
$$B\ C \leftrightarrow D\ A$$
$$۲B \leftrightarrow ۲D$$
$$C\ A \leftrightarrow ۲C\ ۲D$$

اگر یک نفر به تعداد کافی A در اختیار داشته باشد، بعد از یک سری مبادله تعداد C ،D و B هایی که در اختیار دارد، چند مورد از موارد زیر می‌تواند باشد؟ ۱) ۶B ۲D ۴C ۲) ۲C D ۳) ۴D ۴) ۳C ۲B

الف) هیچ مورد ب) ۱ مورد ج)۲ مورد د)۳ مورد ه)۴ مورد

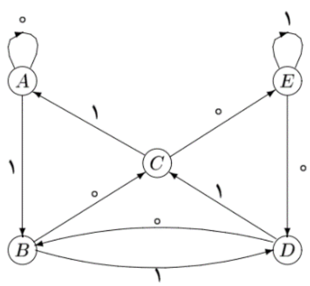
۳۸- ۱۰ نوع کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۰ و از هرکدام ۴ عدد داده شده است. این ۴۰ کارت را در هم می‌ریزیم و آن‌ها را به طور تصادفی در ۱۰جعبه با شماره ۱ تا ۱۰ قرار می‌دهیم (در هر جعبه ۴ کارت). سپس از جعبه شماره ۱ شروع می‌کنیم و یک کارت برداشته شده یکسان است یک کارت برمی داریم. این روند را آن قدر تکرار می‌کنیم تا به جعبه ای برسیم که درون آن کارتی نباشد. احتمال این که شماره‌ی این جعبه ۱ باشد در کدام یک از بازه‌های زیر قرار می‌گیرد؟

الف) (۰/۵ ، ۱]  ب) (۰/۲۵ ، ۰/۵]  ج) (۰/۱ ، ۰/۲۵]  د) (۰/۰۱ ، ۰/۱]  ه) (۰ ، ۰/۰۱]

۳۹- در جدول ۱۰۰×۱۰۰ از ۰ و ۱، در هر مرحله به ازای یک عدد k، همه‌ی اعداد سطر kام را یک و سپس همه‌ی اعداد ستون kام را صفر می‌کنیم. از یک جدول تمام صفر شروع می‌کنیم. ۱۰۹ مرحله، این عمل را روی جدول انجام می‌دهیم: در ۵۰ مرحله‌ی اول، به ازای kهای زوج از ۲ تا ۱۰۰ و در ۵۰ مرحله بعد به ازای kهای فرد از ۱ تا ۹۹ به ترتیب این کار را انجام می‌دهیم. سپس برای ۹ عدد دنباله‌ی ۱۳،۱،۹۷،۷،۵،۲،۴،۱۰۰و۹۹ (از راست به چپ) این کار را انجام می‌دهیم. عدد دودویی متناظر کدام سطر کمترین مقدار را دارد؟

الف)۳  ب) ۶  ج)۷  د)۹  ه)۹۸

۴۰- در نمودار مقابل از رأس A شروع می‌کنیم و با خواندن از چپ به راست رشته‌ی ورودی از رقم‌های صفر و یک ،روی نمودار حرکت می‌کنیم ،به‌عنوان مثال اگر رشته ورودی ۰۱۰۱۱ باشد، از A شروع می‌کنیم و به ترتیب به رأس‌های A،B،C، A و B می‌رویم (در B متوقف می‌شویم) اگر رشته‌های دریافتی، عدد دودویی معادل عدد ۲۰۰۱۱۴۲۱۱۳۷۹ باشد، پس از دریافت آخرین رقم عدد دودویی (کم ارزش‌ترین رقم) در کدام رأس متوقف می‌شویم؟




الف)A  ب)B  ج) C  د)D  ه)E

## «پاسخنامه تشریحی»

۱- دسته اعداد زیر، تصاعدهایی هستند که قدر نسبت هر یک از آن‌ها عددی صحیح می‌باشد.

| | |
|---|---|
| ۸ و ۴ و ۲ | ۴ و ۲ و ۱ |
| ۹ و ۳ و ۱ | ۱۶ و ۸ و ۴ |
| ۲۰ و ۱۰ و ۵ | ۱۸ و ۶ و ۲ |
| ۱۲ و ۶ و ۳ | ۱۶ و ۴ و ۱ |
| ۲۵ و ۵ و ۱ | ۲۴ و ۱۲ و ۶ |
| ۲۸ و ۱۴ و ۷ | ۲۷ و ۹ و ۳ |

و اما دسته اعداد زیر تصاعدهایی هستند که قدر نسبت هر یک از آن‌ها عددی غیرصحیح می‌باشد.

| | | |
|---|---|---|
| ۲۷ و ۱۸ و ۱۲ | ۱۸ و ۱۲ و ۸ | ۹ و ۶ و ۴ |
| ۲۵ و ۲۰ و ۱۶ | ۲۵ و ۱۵ و ۹ | ۲۵ و ۱۰ و ۴ |

بنابراین مجموعاً ۱۸ تصاعد هندسی پیدا می‌شود که متأسفانه در گزینه‌ها نیامده است.

۲- بزرگترین عدد ممکن ۱۱۱۱ و کوچک‌ترین آن‌ها $\overline{۱}\overline{۱}\overline{۱}\overline{۱}$ می‌باشد که به ترتیب ارزش ۱۵ و ۱۵- دارند. بین این دو عدد نیز همه اعداد صحیح قابل تولید می‌باشند، بنابراین ۳۱ عدد متمایز با ارقام مورد اشاره قابل ساخت می‌باشد.

۳- تعداد a ها برابر ۳ و تعداد b ها برابر ۶ بوده و شروع هر یک از دنباله‌ها با a و پایان آن دنباله‌ها با دو عدد b می‌باشد که به شکل زیر می‌باشند:

| | | |
|---|---|---|
| ababbbabb | aabbbbabb | aaabbbbbb |
| abbaabbbb | abaabbbbb | aababbbbb |
| abbababbb | abababbbb | aabbabbbb |
| abbabbabb | ababbabbb | aabbbabbb |

۴- تعداد کل جایگشت‌های از ۱ تا ۱۰ برابر !۱۰ می‌باشد که در نصف آن‌ها ۱ قبل از ۲ و در نصف دیگر ۲ قبل از ۱ می‌باشد. به همین ترتیب در نصف اعداد مطلوب $\left(\frac{10!}{2}\right)$ عدد ۳ قبل از ۴ و در نصف دیگر ۴ قبل از ۳ می‌باشد. اگر به همین ترتیب ادامه دهیـــم، معلوم اسـت کـه جـواب مطلوب برابر $\frac{10!}{2^5}$ خواهد شد.

۵- شرط لازم آن است که طول B مضربی از ۴ باشد.

۶- باتوجه به داده‌های مسأله ترتیب LMNQJ به دست می‌آید، که قبل از L باید فقط یک نفر قرار گیرد، اگر K قبل از L باشد، آنگاه ترتیب افراد به شکل زیر، در می‌آید:

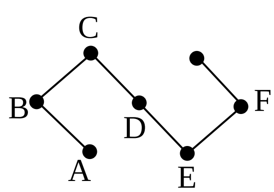
KL□M□N□Q□J□

که اگر دو نفر P و O پیش هم باشند، آنگاه یک خانه از مربع‌ها را انتخاب کرده و آن دو حرف را در آنجا قرار می‌دهیم (ابتدا P و سپس O)، که این کار به ۵ طریق ممکن است. اما اگر دو نفر P و O پیش هم نباشند آنگاه دو خانه از مربع را به $\binom{۵}{۲}$؛ یعنی ۱۰ طریق انتخاب کرده و در اولی P و در دومی O را قرار می‌دهیم.

اگر P قبل از L باشد، آنگاه ترتیب افراد به شکل $J\square \quad Q\square \quad L\square \quad N\square \quad PL\square$ در می‌آید که اگر دو نفر O و K پیش هم باشند، آنگاه یک خانه از مربع‌ها را انتخاب کرده و آن دو حرف را به !۲ طریق در آن مربع قرار می‌دهیم (چون باید K قبل از J باشد، پس مربع آخر نمی‌تواند انتخاب شود)، این کار به $\binom{۴}{۱}$ × !۲؛ یعنی ۸ طریق ممکن است. اما اگر دو نفر O و K پیش هم نباشند، آنگاه یکی از چهار مربع اول را انتخاب K را در آن قرار می‌دهیم و سپس یکی از چهار مربع باقی مانده را انتخاب کرده و O را در آن قرار می‌دهیم که این کار نیز به ۴ × ۴ طریق ممکن است. بنابراین تعداد کل حالات برابر ۱۶ + ۸ + ۱۰ + ۵؛ یعنی ۳۹ خواهد شد.

۷- ارزش عدد ۱۰۱۰۱۰۱۰ در مبنای ۱۰ برابر ۱۷۰ می‌باشد، در حالی که یک عدد هفت رقمی در مبنای ۲ حداکثر ارزشی برابر ۱۲۷ می‌تواند داشته باشد. اگر هر دو عددی که مجموعشان برابر ۱۷۰ می‌شود را مکمل هم بنامیم، آنگاه مکمل ۱۲۷ عدد ۴۳، مکمل ۱۲۶ عدد ۴۴ و ... و بالاخره مکمل ۸۵ خود ۸۵ می‌شود. همه زوج‌های اشاره شده در مبنای دو که تعداد آن‌ها برابر ۱ + ۴۳ – ۸۵؛ یعنی ۴۳ می‌باشد، در مبنای ۲ حداکثر ۷ رقمی هستند در حالی که سایر زوج‌های مکمل مثل ۴۰ ؛ ۱۳۰، یکی از مؤلفه‌هایشان در مبنای ۲ هشت رقمی بوده و قابل قبول نیستند.

۸- اگر یک دوره تناوب از شکل را در نظر بگیریم و مختصات نقطه A به صورت (K,K) باشد، آنگاه اولاً K فرد است. ثانیاً در نقاط A، B، C، D، E و F به ترتیب اعداد ۳K + ۱ ، ۳K + ۲ ، ۳K + ۴ ، ۳K + ۵ و ۳K + ۶ قرار دارد. عدد ۱۳۷۹ به صورت ۳K + ۲ می‌باشد. بنابراین آن عدد در نقطه B قرار دارد. چون از تساوی ۱۳۷۹ = ۳K + ۲ مقدار K برابر ۴۵۹ به دست می‌آید. پس مختصات نقطه A به صورت (۴۵۹ ، ۴۵۹) و مختصات نقطه B به صورت ( ۴۶۰ ، ۴۵۸) خواهد بود.




۹- در کل جدول حداکثر سه لامپ قرمز، سه لامپ زرد و یک لامپ سبز موجود است، بنابراین وجود دو لامپ آبی الزامی است. مطابق جدول مقابل وجود دو لامپ آبی کافی است.

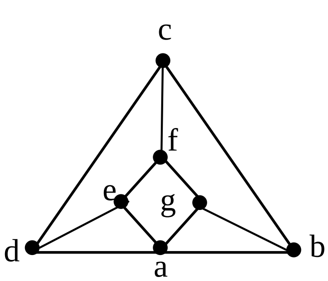
| | | |
|---|---|---|
| زرد | سبز | قرمز |
| آبی | قرمز | زرد |
| قرمز | زرد | آبی |

۱۰- به خاطر تقارن موجود در شکل اگر فرض کنیم ab زرد، ag قرمز، ae آبی و ad سبز باشند، کلیت مسأله به هم نمی‌خورد. در این صورت رنگ سایر یال‌ها به اجبار به شکل زیر خواهند بود.

fg =آبی و dc =آبی و ef=سبز و de=قرمز

gb=? و cb=سبز و cf=قرمز

همان طور که مشخص است برای gb رنگی پیدا نمی‌شود.



۱۱- اگر نفر اول x متر را پیاده و مابقی $۱۳۰۰ - x$ متر را با دوچرخه برود معلوم است که نفر دوم x متر اول را با دوچرخه و مابقی مسافت را پیاده خواهد رفت. بهترین حالت آن است که هر دو هم زمان به مقصد برسند. بنابراین:

$$\frac{x}{۴}+\frac{۱۳۰۰-x}{۱۲}=\frac{x}{۱۶}+\frac{۱۳۰۰-x}{۶}\Rightarrow ۱۳x=۴\times ۱۳۰۰ \Rightarrow x=۴۰۰$$
$$\Rightarrow t=\frac{۴۰۰}{۴}+\frac{۱۳۰۰-۴۰۰}{۱۲}=۱۰۰+۷۵=۱۷۵$$

۱۲- افراد را A، B و C می‌نامیم. $n(X)$ ، $n(\bar{X})$، $n(X\cap Y)$ و $n(X\cup Y)$، به ترتیب نشانگر تعداد افرادی است که به X رأی داده‌اند، به X رأی نداده‌اند، هم به X و هم به Y رأی داده‌اند و بالاخره به X یا Y رأی داده‌اند. حداقل مقدار عبارت $n(A\cap B\cap C)$ مطلوب مسأله می‌باشد.

$$n(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})\le n(\bar{A})+n(\bar{B})+n(\bar{C})=۴+۸+۱۱=۲۳$$
$$\Rightarrow n\left[\overline{(A\cap B\cap C)}\right]\le ۲۳\Rightarrow n(total)-n(A\cap B\cap C)\le ۲۳$$
$$\Rightarrow ۳۰-n(A\cap B\cap C)\le ۲۳\Rightarrow ۷\le n(A\cap B\cap C)$$

۱۳- بهترین عدد ممکن عدد ۱۱۰۰۰۱۰۱۰ می‌باشد که شامل ۹ رقم می‌باشد.

۱۴- یک نفر حداکثر ۶ نفر می‌تواند آشنا داشته باشد. بنابراین A حتماً راست گفته است؛ یعنی A با همه دست داده است، از جمله B.G نمی‌تواند دروغ گفته باشد زیرا در این صورت با ۶ نفر دست داده است (با همه) که در این صورت G با هر دو نفر A و B دست داده است و جواب او «۱» دروغ است، در صورتی که تعداد دروغ گوها بیش از یک نفر نیست. پس B نیز راستگو می‌باشد؛ یعنی A با همه و B به غیر از G با همه دست داده‌اند. بنابراین E و F هر دو حداقل با هر دو نفر A و B دست داده‌اند. به طریق مشابه استدلال می‌شود که دو نفر C و D نمی‌توانند دروغگو باشند یعنی یکی از دو نفر E یا G دروغ گفته است.

۱۵- اگر بار اول تا دهم همگی سفید بیایند، حسین و در غیر این صورت علی برنده خواهد شد؛ یعنی به غیر از حالت اشاره شده، اگر حسین بخواهد برنده شود باید ۱۰ بار متوالی سفید بیاید که چون قبل از این سفیدها یک سیاه آمده است، قبل از پرتاب آمدن سفید دهم، علی برنده می‌شود، چون یک سیاه و نه سفید متوالی ظاهر شده است. بنابراین احتمال برد حسین $(\frac{۱}{۲})^{۱۰}$ و احتمال برد علی $۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰}$ می‌باشد.

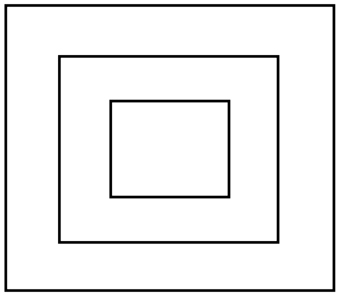
۱۶- گزینه ای مطلوب است که به ازای دو رشته موجود در آن یک رشته ۶ حرفی یافت نشود که هر دو رشته داده شده زیر رشته آن باشند. به ازای ۰۱۰۱ و ۱۱۱ موجود در گزینه الف رشته ۰۱۰۱۱۱ و به ازای ۱۰۱ و ۱۱۱ موجود در گزینه ب رشته ۱۰۱۱۱۱ و به ازای ۱۱۰۱۱ و ۱۰۱۱۰ موجود در گزینه ج رشته ۱۱۰۱۱۰ موجود هستند، بنابراین گزینه‌های مطلوب نمی‌باشند، به ازای ۰۱۰۱ و ۱۱۱۰ موجود در گزینه د هیچ رشته ۶ حرفی که هر دوتای آن‌ها زیر رشته آن باشند یافت نمی‌شود.

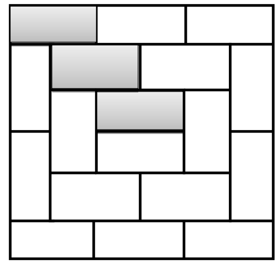
۱۷- حالت مینیمم موقعی است که سطرهای دوم، چهارم، ششم و هشتم همگی ۱ و مابقی خانه‌ها ۰ باشند، که در این صورت تعداد ۱ها، ۳۶ خواهد بود.

حالت ماکزیمم نیز موقعی است که سطرهای فرد همگی ۱ و سطرهای زوج نیز یک در میان ۱ باشند (با شروع از ۱) که در این صورت نیز تعداد ۱ ها $۵\times ۴ + ۹\times ۵$؛ یعنی ۶۵ خواهد بود.

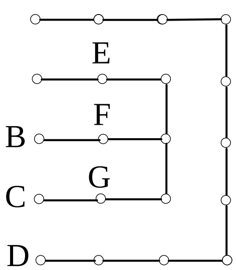
۱۸- اگر کف اتاق را به شکل مقابل در نظر بگیریم و در هیچ یک از سه ناحیه کاشی قرار ندهیم، آنگاه کودک به دو طریق می‌توانـد کاشی‌ها را در هر یک از آن ناحیه قرار دهد. پس وجود حداقل سه کاشی الزامی است.

اگر سه عدد کاشی را مطابق شکل مقابل در کف اتاق بچینیم کودک فقط به یک طریق می‌تواند کار را ادامه دهد.

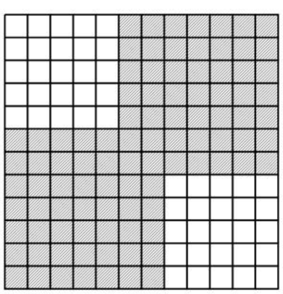




۱۹- تعداد کلماتی که حرف اول آن‌ها برابر a است و یک حرفی، دو حرفی، .... و شش حرفی می‌باشنـد، بـه ترتیب بـرابـر $۲^{۰}$، $۲^{۱}$، $۲^{۲}$، $۲^{۳}$، $۲^{۴}$، $۲^{۵}$ می‌باشند که مجموع آن‌ها برابر $۲^{۶} - ۱$؛ یعنی ۶۳ می‌شود. پس از کلمه شصت و چهارم به بعد همه کلمات با b شروع می‌شوند. تعداد کلماتی که با ba شروع می‌شوند $۲^{۵} - ۱$؛ یعنی ۳۱ می‌باشد، بنابراین از کلمه شصت و پنجم تا کلمه نود و پنجم از جمله کلمه هفتاد و نهم با ba شروع می‌شوند. تعداد کلماتی که با baa شروع می‌شوند برابر $۲^{۴} - ۱$؛ یعنی ۱۵ می‌باشد، بنابراین از کلمه شصت و ششم تا کلمه هشتادم، از جمله کلمه هفتاد و نهم با baa شروع می‌شوند. با همین استدلال معلوم می‌شود که کلمه هفتاد و نهم کلمه baabba می‌شود.

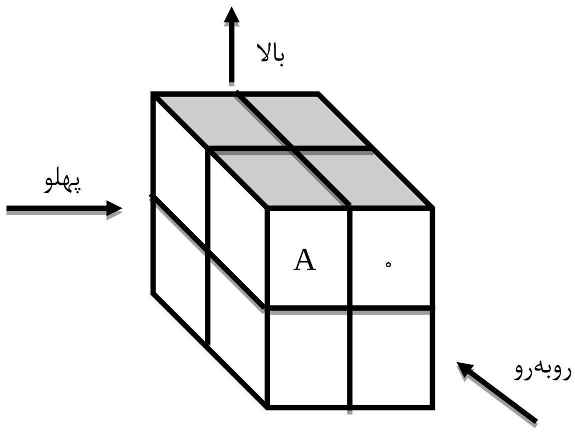


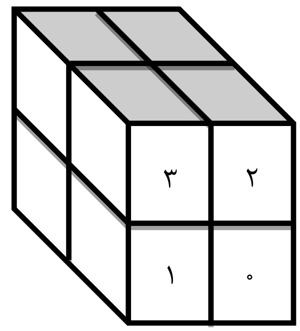

۲۰- ابتدا حمید پاره خط‌های EF، AB و BC را کشیده و دو امتیاز کسب می‌کند، سپس امید پاره خط‌های FG را کشیده و دو امتیاز کسـب می‌کند و جایزه خود را یکی از پاره خط‌های باقی مانده انتخـاب کـرده و رسم می‌کند. این پاره خط هر پاره خطی (مانند CD) می‌تواند باشد، همه امتیازات باقی مانده که ۸ امتیاز می‌باشد را نصیب حمید خواهد کرد.



۲۱- خانه های هاشـور خورده نشانگر O و سـایـر خانه‌ها نشـانگر X می‌باشند. پس از مراحـلی وضعیت جدول به شکل مقابل می‌باشد که ۹۴ خانه از آن O می‌باشد و تا آن مرحله هرگز تعداد O ها به بیش از ۹۴ نمی‌رسد. پس از این مرحله یک در میان وضعیت جدول به همین شکل می‌شود. پس هرگز تعداد O ها بیش از ۹۴ نخواهد رسید.

۲۲- فرض می‌کنیم اعداد ۰ و ۳ از وجه «روبه رو» مطابق شکل مقابل، پهلوی هم باشند در این صورت هر دو عدد نوشته شده در خانه‌های بالای وجه «پهلو» برابر ۲ خواهد بود که مطلوب نیست. اما اگر اعداد ۰ و ۳ از وجه «رو به رو» مطالب شکل مقابل پهلوی هـم نباشـند در این صورت، آنگاه اعداد موجود در ستون اول وجه «پهلو» هر دو برابر ۲ خواهد شد که باز مطلوب نیست. بنابراین هرگز حالت خواسته شده به دسـت نمی‌آید.




۲۳- اگر $A_۱$ راستگو باشد وضعیت حقیقی آن یازده نفر به ترتیب به صورت د، د، ر، د، ر، د، ر، ر، ر، ر، ر و اگر $A_۱$ دروغ گو باشد وضعیت حقیقی آن یازده نفر، به ترتیب به صورت ر، ر، د، ر، د، ر، د، د، د، د، د خواهد بود. پس تعداد دروغ گوها در ایـن جمـع حداقل برابر ۴ می‌باشد.

۲۴- در ابتدا آب موجود در هر یک از ظروف را $\frac{۳^k}{۳^k}$ در نظر می‌گیریم که در آن K به اندازه کافـی بزرگ است. پس از گذشـت مراحلـی وضعیت سه ظرف چنان است که مخرج همان $۳^K$ بوده و صورت آن‌ها به صورت $a \times ۳^i$ , $b \times ۳^i$ , $c \times ۳^i$ در می‌آیـد. در مرحـلـه بعد با فرض این که آب موجود در ظرف اول را تقسیم کنیم صورت سه کسر به ترتیب برابر $a \times ۳^{i-۱}$ , $(۳b + a) \times ۳^{i-۱}$ , $(۳c + a) \times ۳^{i-۱}$ خواهد شد که اگر صورت هر یک از کسرها را با مخرج آن‌ها ساده کنیم، صورت آن کسرها به ترتیب به صورت a، ۳b + a و ۳c + a خواهد شد که باقی مانده آن سه عدد در تقسیم بر ۳ یکسان است. در بین گزینه‌ها فقط سه عدد موجود در گزینه «د» چنان هستند که صورت هر سه عدد در تقسیم بر ۳ باقی مانده ۱ می‌آورد.

۲۵- تعداد طرقی که آن دو در نقطه ۵ باهم ملاقات کنند برابر $۱^۲$ می‌باشد. تعداد طرقی که آن دو در نقطه ۳ باهم ملاقات کنند برابر $\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}^۲$؛ یعنی ۲۵ می‌باشد. در حقیقت هر یک از آن دو نفـر به $\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}$ طریـق می‌توانند یکی از ۵ حرکـت خود را به عنـوان حرکت برگشـــتی انتخاب کنند. تعداد طرقی که آن دو در نقطه ۱ باهم ملاقات کنند برابر $\begin{bmatrix}۵\\۲\end{bmatrix}^۲$؛ یعنی ۱۰۰ می‌باشد. در حقیقت هر یک از آن دو نفر به $\begin{bmatrix}۵\\۲\end{bmatrix}$ طریق می‌توانند دو تا از ۵ حرکت خود را به عنوان حرکت برگشتی انتخاب کنند.

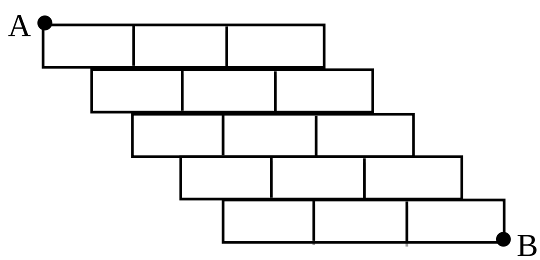
تعداد طرق ملاقات آن دو در نقاط ۵-، ۳- و ۱- نیز به همان صورت به دست می‌آید. پس جواب مطلوب برابر (۱۰۰ + ۲۵ + ۱)۲؛ یعنی ۲۵۲ می‌باشد.

یادآوری می‌شود که امکان ملاقات آن دو در نقاط زوج غیرممکن است.

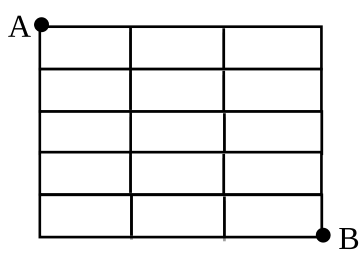
۲۶- I. برای آن که A و B به مرحله نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:
C و D باهم قیاس می‌شوند که D برنده می‌شود.
A و D باهم قیاس می‌شوند که A برنده شده و به همراه B به فینال می‌رسد.
II. برای آن که C و D به مرحله نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:
A و B باهم قیاس می‌شوند که B برنده می‌شود.
B و D باهم قیاس می‌شوند که D برنده شده و به همراه C به فینال می‌رسد.
III. برای آن که B و C به مرحله نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:
A و D باهم قیاس می‌شوند که A برنده می‌شود.
A و C باهم قیاس می‌شوند که C برنده شده و به همراه B به فینال می‌رسد.
IV. برای آن که A و C به مرحله نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:
B و D باهم قیاس می‌شوند که D برنده می‌شود.
D و A باهم قیاس می‌شوند که A برنده شده و به همراه C به فینال می‌رسد.

۲۷- خط مرسوم از A مثلث را به ۶ ناحیه تقسیم می کندو ۱۵ خط مرسوم از B هر یک، خطوط مرسوم از A (۵ خط سوایی به همراه پاره خط AC) را قطع می‌کند و به ازای هر نقطه تقاطع یک ناحیه جدید ایجاد می‌شود. بنابرین کل ناحیه‌های به دست آمده تا این مرحله برابر ۶ + ۶ × ۱۵؛ یعنی ۹۶ می‌باشد. هر یک از ۱۰ خط مرسوم از C هر یک از ۲۱ خط قبلی (۵ + ۱۵ خط سوایی به همراه پاره خط AB) را در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین تعداد ناحیه‌های اضافه شده برابر ۲۱ × ۱۰؛ یعنی ۲۱۰ خواهد شد. معلوم می‌شود که تعداد کل ناحیه‌ها برابر ۹۶ + ۲۱۰؛ یعنی ۳۰۶ می‌باشد.

۲۸- بعضی از خطوط شبکه اضافه بوده و هرگز از آن‌ها نمی‌توان عبور کرد. با حذف آن خطوط، شبکه جدید به صورت مقابل در می‌آید:




تعداد مسیرهای مطلوب در شبکه فوق با تعداد مسیرهای از A به B در شبکه مقابل تفاوتی ندارد که این تعداد برابر $\left[\begin{matrix} ۳+۵ \\ ۳ \end{matrix}\right]$؛ یعنی ۵۶ می‌باشد.




۲۹- اگر M + N زوج باشد کامپیوتر و در غیر این صورت بازی کن برنده می‌شود.

۳۰- تنوع حروف به کار رفته در هر یک از کلمات به یکی از چهار شکل زیر می‌باشد:

x, x, x, x, x, x, y, y

x, x, x, x, x, x, x, y

x, x, x, x, y, y, y, y

x, x, x, x, x, y, y, y

تعداد کلمات قابل ساخت در هر یک از چهار شکل فوق به ترتیب $\begin{bmatrix}۶\\۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}\frac{۸!}{۷!}$ ، $\begin{bmatrix}۶\\۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}\frac{۸!}{۶!۲!}$ ، $\begin{bmatrix}۶\\۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}\frac{۸!}{۵!۳!}$ و $\begin{bmatrix}۶\\۲\end{bmatrix}\frac{۸!}{۴!۴!}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها ۳۸۱۰ می‌باشد.

۳۱- برای آن که دو قورباغه به هم برسند لازم است برایند حرکت هر یک از آن دو ۳۴۷۵ سانتی متر به سمت دیگری باشد. عدد ۳۴۷۵ در مبنای ۲ به شکل ۱۱۰۱۱۰۰۱۰۰۱۱ =A می‌باشد. در هر جهش قورباغه به اندازه $۲^i$ سانتی متر جهش می‌کند و این به آن معناست که به عدد A در مبنای ۲ به اندازه ۰۰ .... ۱۰۰ اضافه و یا آن اندازه از A کم شده است. عمل موقعی به اتمام می‌رسد که عدد مورد نظر به ۰ برسد. بهترین الگوریتم به شکل زیر می‌باشد:

$$A-۲^۰-۲^۲-۲^۴+۲^۷+۲^۹-۲^{۱۲}$$

الگوریتم فوق پس از ۶ مرحله قورباغه‌ها را به هم خواهد رساند.

۳۲- اگر تعداد رشته‌هایی به طول n که شامل ۰۰ نیستند را با F(n) نمایش دهیم، آنگاه آن تعداد را به دو دسته تقسیم کنیم، رشته‌هایی که رقم آخرشان ۰ است و رشته‌هایی که رقم آخرشان ۱ است. رقم ماقبل آخر تمام رشته‌های موجود در دسته اول ۱ می‌باشد چون در هیچ یک از آن‌ها دو رقم ۰ پشت سر هم نیامده است، بنابراین تعداد آن رشته‌ها را n − ۲ رقم اول تعیین خواهد کرد که باتوجه به تعریف این تعداد برابر $F(n) = F(n-۱) + F(n-۲)$ برقرار است و باتوجه به تساوی‌های $F(۲) = ۳$ و $F(۳) = ۵$ تساوی‌های زیر حاصل خواهند شد:

$$F(۴)=۸\ ,\ F(۵)=۱۳\ ,\ F(۶)=۲۱\ ,\ F(۷)=۳۴\ ,\ F(۸)=۵۵$$

از طرف دیگر باتوجه به اصل شمول و عدم شمول رابطه زیر برقرار است:

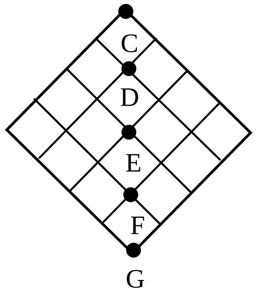
$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

حاصل هر یک از عبارات $|A|$ و $|B|$ برابر ۵۵ به دست آمد. حاصل $|A\cap B|$ نیز برابر ۲ می‌باشد زیرا تنها دو رشته ۱۰۱۰۱۰۱۰ و ۰۱۰۱۰۱۰۱ می‌باشد که نه شامل ۰۰ است و نه شامل ۱۱. بنابراین:

$$|A\cup B| = ۵۵ + ۵۵ - ۲ = ۱۰۸$$

۳۳- اگر باقی مانده تقسیم عدد بر ۳ برابر ۱ باشد، آنگاه یکی از ارقام ۱ موجود در جایگاه‌های فرد را از ۱ به ۰ تبدیل می‌کنیم و اگر آن جایگاه‌ها ۰ باشد می تونیم یکی از ارقام ۰ موجود در جایگاه‌های زوج را از ۰ به ۱ تبدیل کنیم، که اگر چنین چیزی نیز ممکن نبود دو تا از ۰ های موجود در جایگاه‌های فرد را از ۰ به ۱ تبدیل می‌کنیم. به همین شیوه ثابت می‌شود که اگر باقی مانده تقسیم عدد بر ۳ برابر ۲ باشد نیز بیشینه عدد بخش پذیری ۲ است.

۳۴- نقاط تقاطع دو متحرک یکی از نقاط C، D، E، F و G از شکل مقابل می‌باشد که احتمال ملاقات آن نفر در هر یک از نقاط مورد اشــاره به شکل زیر می‌باشد:



$$P(C) = P(G) = \frac{۱}{۱۶} \times \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱}{۲۵۶}$$
$$P(D) = P(F) = \frac{۴}{۱۶} \times \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱۶}{۲۵۶}$$
$$P(E) = \frac{۶}{۱۶} \times \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳۶}{۲۵۶}$$
$$\Rightarrow\ P = \sum P_i = \frac{۱}{۲۵۶} + \frac{۱۶}{۲۵۶} + \frac{۳۶}{۲۵۶} + \frac{۱۶}{۲۵۶} + \frac{۱}{۲۵۶} = \frac{۷۰}{۲۵۶} = \frac{۳۵}{۱۲۸}$$

۳۵- اگر دوره ۱، ۲، ۳، ... ، ۹ به تعداد چهار بار تکرار شود، آنگاه هر یک از آن ۹ عدد یک بار در سمت بالا، یک بار در سمت پایین، یه بار در سمت راست و یک بار در سمت چپ به کار می‌روند؛ یعنی بعد از طی چهار دوره به نقطه اولیه خواهیم رسید که در این صورت مجموعاً (۹ + ... + ۳ + ۲ + ۱) × ۴؛ یعنی ۱۸۰ دسی متر طی شده است.

۳۶- چون رقم سمت چپ $W$ همیشه ۱ است پس رقم سمت راست $W^R$ همیشه ۱ خواهد بود؛ یعنی $W^R$ همیشه عدد فردی است. باتوجه به تساوی $W = ۱۲W^R$ معلوم می‌شود که $W$ مضرب ۴ بوده، ولی مضرب ۸ نمی‌باشد؛ یعنی $W$ در سمت راست خود به دو رقم ۰ ختم می‌شود و این به معناست که $W$ از $W^R$ فقط دو رقم بیشتر دارد. عدد که در مبنای ۲ از عدد دیگر ۲ رقم اضافی داشته باشد، حداکثر $a$ برابر دیگری می‌تواند باشد که $a$ کمتر از ۸ می‌باشد.

۳۷- شیوه تولید مورد اول به شکل زیر می‌باشد:
(لازم به یادآوری است که در هر مرحله می‌توانیم به تعداد دلخواه $A$ وارد عمل کنیم و در ضمن شماره عمل به کار رفته بر روی فلش نوشته شده است.)

$$۴A \xrightarrow{(۱)} ۴B۴D = ۴B۴(DA) \xrightarrow{(۲)} ۸B۴C = ۶B۴C۲B \xrightarrow{(۳)} ۶B۴C۲D$$

شیوه تولید مورد سوم به شکل زیر می‌باشد:

$$۲A \xrightarrow{(۱)} ۲B۲D \xrightarrow{(۳)} ۲D۲D = ۴D$$

شیوه تولید مورد چهارم به شکل زیر می‌باشد:

$$۳A \xrightarrow{(۱)} ۳B۳D = ۳B۳(DA) \xrightarrow{(۲)} ۳B۳B۳C = ۲B۴B۳C$$
$$\xrightarrow{(۳)} ۲D۴B۳C = ۲(DB)۲B۳C \xrightarrow{(۱)} ۲B۳C$$

مورد دوم قابل تولید نمی‌باشد.

۳۸- وقتی جعبه ای مانند $i$ (غیر از ۱) خالی شود به این معناست که هر چهار کارت با شماره $i$ دور انداخته شده‌اند و هیچ کارتی با شماره $i$ در بین کارت‌های باقی نمانده است؛ یعنی هرگز به جعبه خالی رجوع نخواهیم کرد. در مورد جعبه ۱، مطلب فوق صدق نمی‌کند زیرا آخرین کارت جعبه ۱ وقتی از آن جعبه خارج می‌شود که قبل از آن سومین ۱ از یکی از جعبه‌ها بیرون آمده باشد و با آمدن چهارمین ۱، مجبوریم به جعبه ۱ مرجعه کنیم که قبل از این چهار کارت آن جعبه خارج شده‌اند. بنابراین به طور حتم جعبه خواسته شده جعبه ۱ می‌باشد.

۳۹- پس از مرحله صدم سطور دوم، چهارم، ششم و ... به ترتیب کمترین ۱ ها را دارند که پس از اجرای مراحل ۱۰۱ تا ۱۰۹ تعداد ۱ های سطور ۲ و ۴ به مراتب افزایش یافته و تعداد ۱ های سطر ششم که در آخر این سطر قرار دارند کمتر از مابقی سطور می‌باشد.

۴۰- اگر رئوس پایانی متناظر به اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ... را در نظر بگیریم، به ترتیب رئوس B، C، D، E، A، B، C، D، E، A، ...... خواهد شد که با دوره تناوب ۵ دنباله B، C، D، E، A تکرار می‌شود. چون باقی مانده عدد داده شده بر ۵ برابر ۴ می‌باشد، بنابراین رأس مورد نظر رأس $E$ می‌باشد.